Integrali impropri (o generalizzati)

Definizione 1. *Sia $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in (a, +\infty]$. Se esiste il limite*

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\, dx = L$$

si dice che esiste l'integrale improprio (o generalizzato) della f sull'intervallo $[a, b)$ e L è il valore dell'integrale. Se L è finito si dice che l'integrale converge, se $L = +\infty$ l'integrale diverge positivamente, se $L = -\infty$ diverge negativamente. Analogamente si definisce l'integrale improprio per funzioni continue su intervalli $(a, b]$ come

$$\lim_{M \to a^+} \int_M^b f(x)\, dx.$$

Definizione 2. *Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con $a, b \in [-\infty, +\infty]$. Se esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che esistono entrambi gli integrali impropri*

$$\int_a^c f(x)\, dx = L_1, \qquad \int_c^b f(x)\, dx = L_2$$

e la somma $L_1 + L_2 = L$ ha senso (escludendo quindi i casi $+\infty - \infty$ o viceversa), allora si dice che esiste l'integrale improprio di f su (a, b) e il suo valore è L. Come nella definizione precedente di dice che l'integrale converge, diverge positivamente o negativamente se rispettivamente L è finito oppure $L = \pm\infty$.

Osservazione 3. *La scelta del punto intermedio c nella definizione precedente è del tutto arbitraria. Infatti dati $c, d \in (a, b)$ si ha che*

$$\int_a^d f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx = \int_c^d f(x)\, dx.$$

I due integrali al primo membro differiscono per una quantità finita, in quanto la f è continua sull'intervallo chiuso che ha per estremi c e d e l'integrale a secondo membro è un integrale di Riemann definito (non improprio). Analogo risultato per gli intervalli che hanno per estremo b. Ne segue che gli integrali impropri

$$\int_a^d f(x)\, dx, \qquad \int_d^b f(x)\, dx$$

esistono se e solo se esistono gli integrali impropri

$$\int_a^c f(x)\, dx, \qquad \int_c^b f(x)\, dx$$

e la somma dei primi due è uguale a quella dei secondi due (oppure nessuna delle due somme ha senso).

Osservazione 4. *Più in generale, data una funzione f definita su un intervallo di $\mathbb{R}$ (non importa se aperto, chiuso, limitato o illimitato) continua tranne in un numero finito di punti, se ne definisce l'integrale improprio suddividendo l'insieme di definizione in un numero finito di intervalli dove si possono applicare le definizioni precedenti. Se la somma di tutti gli integrali impropri ottenuti ha senso si dice che tale somma è l'integrale improprio della f sul suo insieme di definizione.*

Proposizione 5. *Se $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua ed ha segno costante allora esiste l'integrale improprio di f su $[a, b)$, finito o infinito. Il teorema vale anche se $b = +\infty$ e si estende ovviamente al caso di intervalli aperti a sinistra.*

Teorema 6 (Criterio del confronto). *Siano f, g due funzioni continue su un intervallo $[a, b)$ con $b \in (a, +\infty]$ tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall\ x \text{ in un intorno di } b.$$

Se l'integrale improprio di g converge allora anche l'integrale improprio di f converge. Se l'integrale improprio di f diverge positivamente allora anche l'integrale improprio di g diverge positivamente.

Teorema 7 (Criterio del confronto asintotico). *Siano f, g due funzioni continue su un intervallo $[a, b)$ con $b \in (a, +\infty]$ tali che*

$$f(x) > 0, \qquad g(x) > 0 \qquad \forall\ x \text{ in un intorno di } b.$$

Se esiste finito e diverso da 0 il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

allora gli integrali impropri di f e di g o convergono entrambi o divergono positivamente entrambi.

Definizione 8. *Data $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, diremo che f è* assolutamente integrabile in senso improprio *se l'integrale improprio di $|f|$ su I converge.*

Teorema 9. *Se f è assolutamente integrabile in senso improprio su un intervallo I allora l'integrale improprio di f su I converge.*

Corollario 10. *Date due funzioni f, g definite su un intervallo I tali che*

$$|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in I$$

se l'integrale improprio di g converge allora anche l'integrale improprio di f converge.

Esempio 11. *Consideriamo al variare del parametro reale α l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

Se $\alpha = 1$ allora

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M \to +\infty} \Big[\log x \Big]_1^M = \lim_{M \to +\infty} \log M = +\infty$$

quindi, per la Definizione 1, l'integrale improprio diverge positivamente.
Se $\alpha \neq 1$ allora

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(M^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$$

Ne segue che se $\alpha \leq 1$ l'integrale improprio diverge positivamente mentre se $\alpha > 1$ converge.

Esempio 12. Consideriamo al variare del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Se $\alpha = 1$ allora

$$\lim_{M\to0^+}\int_M^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to0^+}\Big[\log x\Big]_M^1 = \lim_{M\to0^+} -\log M = +\infty$$

quindi l'integrale improprio diverge positivamente. Se $\alpha \neq 1$ allora

$$\lim_{M\to0^+}\int_M^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_M^1 = \lim_{M\to0^+}\frac{1}{1-\alpha}(1-M^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$$

Ne segue che se $\alpha < 1$ l'integrale improprio converge mentre se $\alpha \geq 1$ diverge positivamente.
Il risultato si estende facilmente a integrali impropri del tipo

$$\int_{x_0}^b \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx$$

con $b \in \mathbb{R},\ b \neq x_0$ che risultano convergenti per $\alpha < 1$ e divergenti positivamente per $\alpha \geq 1$.

Esempio 13. Consideriamo al variare dei parametri reali α, β l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx. \tag{1}$$

La funzione integranda è sicuramente positiva, quindi possiamo applicare i Teoremi 6 e 7. Osserviamo preliminarmente che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{x}$ abbastanza grande tale che

$$\log x \leq x^\varepsilon \qquad \forall x \geq \bar{x}.$$

Ne segue che per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$x^{-|\beta|\varepsilon} \leq (\log x)^{-|\beta|} \leq (\log x)^\beta \leq (\log x)^{|\beta|} \leq x^{|\beta|\varepsilon} \qquad \forall x \geq \bar{x}. \tag{2}$$

Mostriamo ora come il comportamento di questo integrale sia determinato in primo luogo dal parametro α. Consideriamo prima il caso $\alpha > 1$. Dalla disuguaglianza (2) otteniamo

$$\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{\alpha-|\beta|\varepsilon}} \qquad \forall x \geq \bar{x}.$$

Se scegliamo $\varepsilon < \frac{\alpha-1}{|\beta|}$, grazie all'Esempio 11, otteniamo che l'integrale improprio della funzione $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-|\beta|\varepsilon}}$ converge. Applicando il Teorema 6 otteniamo che anche l'integrale dato converge, indipendentemente dal valore di β. Analogamente, se $\alpha < 1$, dalla disuguaglianza (2) otteniamo

$$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \geq \frac{1}{x^{\alpha + |\beta|\varepsilon}} \qquad \forall x \geq \bar{x}.$$

Scegliendo $\varepsilon < \frac{1-\alpha}{|\beta|}$ stavolta otteniamo che la funzione $h(x) = \frac{1}{x^{\alpha+|\beta|\varepsilon}}$ ha integrale improprio divergente positivamente e il Teorema 6 ci garantisce che anche l'integrale dato diverge positivamente, indipendentemente dal valore di β. Resta da esaminare il caso $\alpha = 1$. In questo caso calcoliamo esplicitamente l'integrale eseguendo la sostituzione $\log x = t$.

$$\lim_{M \to +\infty} \int_e^M \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^{\log M} \frac{1}{t^\beta}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\, dt$$

e l'ultimo integrale improprio converge per $\beta > 1$ e diverge per $\beta \leq 1$, come mostra l'Esempio 11.
Tirando le somme l'integrale improprio (1) converge se $\alpha > 1$ indipendentemente da β e se $\alpha = 1$ per ogni $\beta > 1$. Per tutti gli altri valori di α e β diverge.